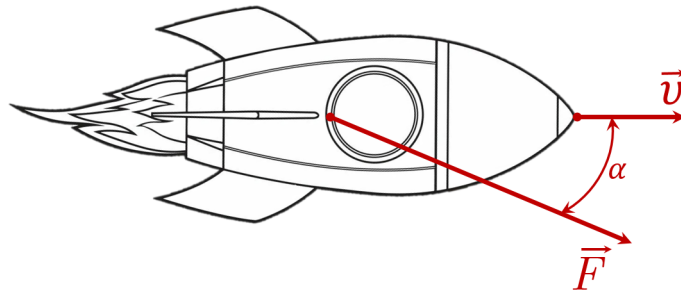


Максимальное количество баллов за олимпиаду — 30

Задание 1. Вариант 1. Космический корабль массой $m = 10$ т движется с постоянной скоростью $v = 100$ м/с в глубоком космосе далеко от любых объектов. В момент времени $t = 0$ у него включается двигатель, который создаёт постоянную силу тяги $F = 20$ кН. Двигатель установлен таким образом, что сила тяги направлена под постоянным углом $\alpha = 30^\circ$ к фюзеляжу (корпусу) корабля.



Корабль движется таким образом, что вектор его скорости всегда остается направленным вдоль фюзеляжа.

а) По какой траектории будет двигаться корабль после включения двигателя?

Ответ:

- По прямой
- По синусоиде
- По окружности
- ✓ По спирали

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 2 балла

б) С каким ускорением будет двигаться корабль сразу после включения двигателя? Ответ выразите в м/с², округлите до целых.

Ответ: 2

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 2 балла

в) Определите значение его скорости через $\Delta t = 10$ с после включения двигателя. Ответ выразите в м/с, округлите до десятых.

Ответ: 117.3

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 3 балла

г) Определите радиус кривизны траектории через $\Delta t = 10$ с после включения двигателя. Ответ выразите в километрах, округлите до десятых.

Ответ: 13.8

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 3 балла

Максимальный балл за задание — 10

Решение.

а) Так как у силы есть проекция, перпендикулярная скорости, то корабль будет всё время поворачивать вправо. Следовательно, он не может двигаться по прямой и по синусоиде (в этих случаях он бы поворачивал то направо, то налево).

Нормальное ускорение, связанное с этой проекцией силы, остаётся постоянным. Оно определяется выражением: $a_n = \frac{v^2}{R}$. Так как у силы есть проекция, параллельная скорости, то скорость корабля будет всё время увеличиваться. Из выражения для нормального ускорения следует, что радиус кривизны траектории всё время увеличивается. Т. е. траекторией является не окружность (здесь был бы постоянный радиус кривизны), а спираль с увеличивающимся радиусом кривизны.

б) Переведём исходные данные в единицы СИ: сила $F = 20$ кН = 20000 Н, масса $m = 10$ т = 10000 кг.

Второй закон Ньютона: $F = ma$.

Получаем, что ускорение корабля: $a = \frac{F}{m} = \frac{20\,000}{10\,000} = 2$ м/с².

в) Силу, которая действует на корабль, можно разложить на две проекции: $F_{||}$ (направлена вдоль скорости) и F_{\perp} (направлена перпендикулярно скорости). Сила F_{\perp} отвечает за поворот вектора скорости без изменения его модуля, а за изменение модуля скорости отвечает $F_{||}$. Найдём её:

$$F_{||} = F \cdot \cos \alpha.$$

Ускорение, связанное с этой проекцией:

$$a_{||} = \frac{F_{||}}{m} = \frac{F \cdot \cos \alpha}{m}.$$

Следовательно, значение скорости через промежуток времени Δt :

$$v_1 = v + a_{\parallel} \cdot \Delta t = v + \frac{F \cdot \cos \alpha}{m} \cdot \Delta t = 100 + \frac{20\,000 \cdot 0.866}{10\,000} \cdot 10 = 117.3 \text{ м/с.}$$

г) Нормальное ускорение корабля связано с проекцией силы F_{\perp} :

$$a_n = \frac{F_{\perp}}{m} = \frac{F \cdot \sin \alpha}{m}.$$

Кроме того, нормальное ускорение определяется выражением:

$$a_n = \frac{v_1^2}{R}, \quad \text{где } R \text{ — радиус кривизны траектории.}$$

Приравняв правые части и выражая R , получаем:

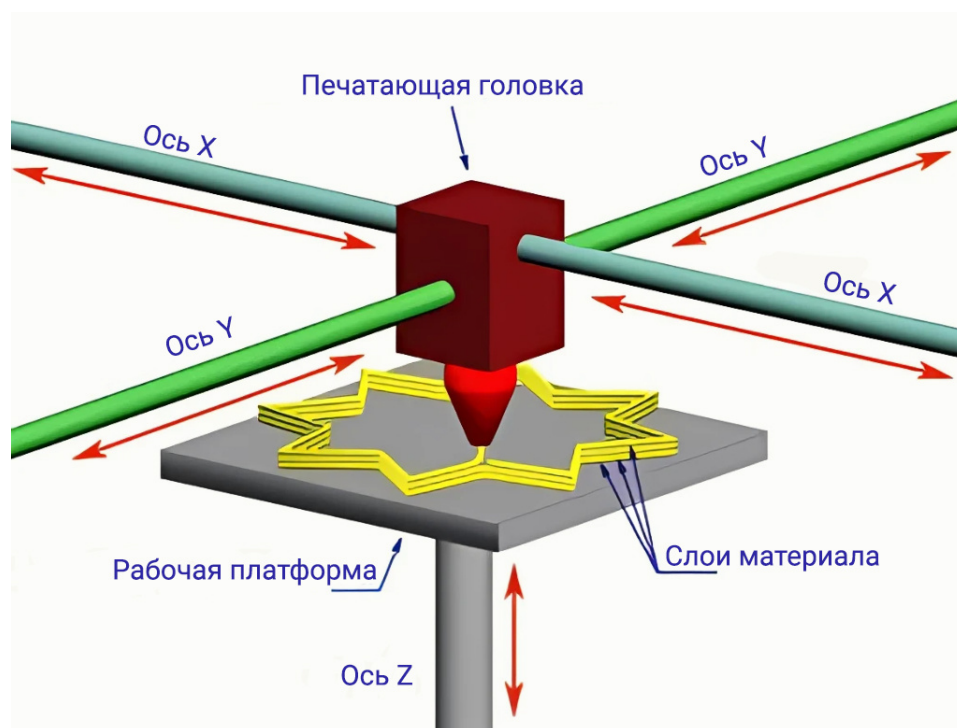
$$R = \frac{m \cdot v_1^2}{F \cdot \sin \alpha} = \frac{10\,000 \cdot 117.3^2}{20\,000 \cdot 0.5} = 13764 \text{ м} = 13.8 \text{ км.}$$

Матрица параметров и ответов к вариантам задания 1.

Пункты б, в, г)

№ варианта	m , т	v , м/с	F , кН	α , град.	a , м/с ²	v_1 , м/с	R , км
1	10	100	20	30	2	117.3	13.8
2	15	120	45	45	3	141.2	9.4
3	20	140	80	60	4	160	7.4
4	25	160	125	30	5	203.3	16.5
5	10	180	60	45	6	222.4	11.7
6	15	200	105	60	7	235	9.1
7	20	220	160	30	8	289.3	20.9
8	25	240	225	45	9	303.6	14.5
9	10	260	100	60	10	310	11.1
10	15	280	165	30	11	375.3	25.6
11	20	300	240	45	12	384.9	17.5
12	25	320	325	60	13	385	13.2
13	10	340	140	30	14	461.2	30.4
14	15	360	225	45	15	466.1	20.5
15	20	380	320	60	16	460	15.3
16	25	400	425	30	17	547.2	35.2
17	10	420	180	45	18	547.3	23.5
18	15	440	285	60	19	535	17.4
19	20	460	400	30	20	633.2	40.1
20	25	480	525	45	21	628.5	26.6

Задание 2. Вариант 1. При печати детали на 3D-принтере печатающая головка должна перемещаться относительно стола в трёх направлениях. Как правило, это реализовано следующим образом: печатающая головка может перемещаться в горизонтальной плоскости вдоль двух осей x и y , а стол — вдоль вертикальной оси z .



Из сопла печатающей головки подаётся пластиковый шнур с площадью поперечного сечения $S = 0.012 \text{ см}^2$ со скоростью $\mu = 0.036 \text{ г/с}$. Плотность пластика $\rho = 1.39 \text{ г/см}^3$.

3D-принтер должен напечатать контур прямоугольного треугольника со следующими параметрами:

- катет длиной $a = 8 \text{ см}$ должен быть расположен вдоль оси Ox ;
- катет длиной $b = 3 \text{ см}$ должен быть расположен вдоль оси Oy .

Считайте, что в процессе печати пластиковый шнур не вытягивается и не сжимается, то есть площадь поперечного сечения «уложенного» пластикового шнура такая же, как в момент выхода из печатающей головки.

а) Чему равен периметр печатаемого треугольника? Ответ выразите в сантиметрах, округлите до десятых.

Ответ: 19.5

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 1 балл

б) Чему равна масса контура треугольника, напечатанного в один слой? Ответ выразите в миллиграммах, округлите до десятых.

Ответ: 326.0

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 2 балла

в) С какой скоростью должна перемещаться головка вдоль оси Ox при печати катета a ? Ответ выразите в см/с, округлите до сотых.

Ответ: 2.16

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 2 балла

г) Сколько времени понадобится для прохождения катета b ? Ответ выразите в секундах, округлите до десятых.

Ответ: 1.4

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 2 балла

д) Чему должен быть равен модуль проекции скорости головки на ось Ox при печати гипотенузы треугольника? Ответ выразите в см/с, округлите до сотых.

Ответ: 2.02

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 1.5 балла

е) Чему должен быть равен модуль проекции скорости головки на ось Oy при печати гипотенузы треугольника? Ответ выразите в см/с, округлите до сотых.

Ответ: 0.76

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 1,5 балла

Максимальный балл за задание — 10

Решение.

а) Так как в задаче сказано, что треугольник прямоугольный, сначала по теореме Пифагора находим длину гипотенузы: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Теперь периметр можно найти как сумму длин всех сторон треугольника: $P = a + b + c = 19.5$ см.

б) Массу пластика, пошедшего на один слой треугольника, можно найти по формуле $m = \rho \cdot V$, где ρ — плотность пластика, V — объём пластика, пошедшего на один слой треугольника. $V = S \cdot P$, тогда $m = \rho \cdot S \cdot P = 326$ мг.

в) Выразим массу пластика, пошедшего на печать катета a , через формулу из предыдущего пункта: $m = \rho \cdot S \cdot a$. Эту же массу можно выразить через скорость подачи пластика $m = \mu \cdot t_a$, где t_a — время перемещения головки вдоль катета. Приравняем правые части двух последних выражений, разделим на t_a и выразим скорость движения головки вдоль оси Ox : $v_x = \frac{\mu}{\rho \cdot S} = 2.16$ см/с. Заметим, что скорость не зависит от длины катета, а значит, является постоянной величиной.

г) Чтобы вычислить время прохождения катета b , нужно длину этого катета разделить на скорость движения головки вдоль оси Oy . Эту скорость можно найти по формуле, приведённой в предыдущем пункте.

$$\text{В итоге } t_b = \frac{b \cdot \rho \cdot S}{\mu} = 1.4 \text{ с.}$$

д) Проекцию скорости головки на ось Ox при печати гипотенузы можно выразить как $v_x^c = v_c \cos \alpha$. Здесь v_c — скорость движения головки вдоль гипотенузы (см. формулу в предыдущих двух пунктах), а $\cos \alpha$ — косинус угла между гипотенузой и катетом a . По определению косинуса $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

$$\text{Тогда искомое значение: } v_x^c = \frac{\mu}{\rho S} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2.02 \text{ см/с.}$$

е) Проекцию скорости головки на ось Oy можно получить тем же способом, что и в предыдущем вопросе, но используя определение синуса. $\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

$$\text{Тогда получается: } v_y^c = \frac{\mu}{\rho S} \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0.76 \text{ см/с.}$$

Матрица параметров и ответов к вариантам задания 2.

№ варианта	S , см ²	μ , г/с	ρ , г/см ³	a , см	b , см	P , см	m , мг	v_x , см/с	t_b , с	v_x^c , см/с	v_y^c , см/с
1	0.012	0.036	1.39	8	3	19.5	326	2.16	1.4	2.02	0.76
2	0.014	0.056	1.74	9	3	21.5	523.4	2.3	1.3	2.18	0.73
3	0.016	0.08	2.04	6	5	18.8	614	2.45	2	1.88	1.57
4	0.018	0.036	0.77	8	9	29	402.5	2.6	3.5	1.73	1.94
5	0.02	0.06	1.09	4	7	19.1	415.6	2.75	2.5	1.37	2.39
6	0.022	0.088	1.38	3	3	10.2	311	2.9	1	2.05	2.05
7	0.024	0.12	1.64	8	4	20.9	824.4	3.05	1.3	2.73	1.36
8	0.026	0.052	0.8	7	5	20.6	428.5	2.5	2	2.03	1.45
9	0.028	0.084	0.91	6	6	20.5	522	3.3	1.8	2.33	2.33
10	0.03	0.12	1.14	9	7	27.4	937.1	3.51	2	2.77	2.15
11	0.012	0.06	1.37	7	3	17.6	289.6	3.65	0.8	3.35	1.44
12	0.014	0.028	0.59	3	4	12	99.1	3.39	1.2	2.03	2.71
13	0.016	0.048	0.76	8	5	22.4	272.8	3.95	1.3	3.35	2.09
14	0.018	0.072	0.98	7	6	22.2	392	4.08	1.5	3.1	2.66
15	0.02	0.1	1.18	2	7	16.3	384.2	4.24	1.7	1.16	4.07
16	0.022	0.044	0.45	5	3	13.8	136.9	4.44	0.7	3.81	2.29
17	0.024	0.072	0.66	4	4	13.7	216.3	4.55	0.9	3.21	3.21
18	0.026	0.104	0.86	2	8	18.2	408	4.65	1.7	1.13	4.51
19	0.028	0.14	1.02	9	6	25.8	737.3	4.9	1.2	4.08	2.72
20	0.03	0.06	0.4	6	9	25.8	309.8	5	1.8	2.77	4.16

Задание 3. Вариант 1. Проточный водонагреватель имеет характеристики, указанные в таблице.

Напряжение питания	220 В
Тип	Проточный
Максимальный расход	9 л/мин
Давление	от 0.3 до 7 бар
Мощность	Экономный режим — 1.9 кВт, турборежим — 3.4 кВт
Степень защиты	IP24
Вес (без упаковки)	1.65 кг



На входе в водонагреватель вода всегда имеет одинаковую температуру 27 °С. Температура на выходе зависит от мощности нагревателя и скорости течения воды.

Потерями энергии пренебрегите.

Удельная теплоёмкость воды 4200 Дж/(кг · °С), плотность — 1000 кг/м³, 1 бар = 10⁵ Па.

а) Чему равна площадь поперечного сечения внутренней части трубы, подводящей воду к нагревателю, если её внутренний диаметр равен 2.54 см? Ответ выразите в см², округлите до сотых.

Ответ: 5.06

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 1 балл

б) С какой скоростью течёт вода через подводящую трубу водонагревателя при максимальном расходе воды? Ответ выразите в см/с, округлите до десятых.

Ответ: 29.6

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 1 балл

в) Обозначим сопротивление водонагревателя в режиме с меньшей мощностью R_1 , а в режиме с большей мощностью — R_2 . Чему равно отношение $\frac{R_1}{R_2}$? Ответ округлите до десятых.

Ответ: 1.8

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 2 балла

г) До какой температуры будет нагреваться вода на выходе из нагревателя при максимальной мощности прибора и максимальном расходе воды? Ответ выразите в градусах Цельсия, округлите до десятых.

Ответ: 32.4

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 2 балла

д) На сколько градусов будет отличаться температура воды в случаях работы прибора на максимальной и минимальной мощностях при условии максимального расхода воды? Ответ выразите в градусах Цельсия, округлите до десятых.

Ответ: 2.4

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 2 балла

е) За какое минимальное время можно наполнить ванну объёмом 0.3 м³ водой при температуре 36 °С? Считайте, что вода в ванной не нагревается и не остывает.

Ответ: 56

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 2 балла

Максимальный балл за задание — 10

Решение.

а) Воспользуемся формулой площади круга:

$$S = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{3.1415 \times 2.54 \times 2.54}{4} = 5.06 \text{ см}^2.$$

б) Найдём объём воды, протекающий через нагреватель за секунду при максимальном расходе воды (данные из таблицы с характеристиками):

$$V_t = 9 \text{ л/мин} = \frac{9 \times 1000}{60} \text{ см}^3/\text{с} = 150 \text{ см}^3/\text{с}.$$

Учитывая, что вода не сжимается и ламинарно течёт через сечение S (см. предыдущий пункт), получаем скорость течения:

$$v = \frac{V_t}{S} = \frac{150 \text{ см}^3/\text{с}}{5.06 \text{ см}^2} = 29.6 \text{ см/с}.$$

в) Воспользуемся тем, что нам известны напряжение сети $U = 220$ В (постоянно) и мощности $P_1 = 1900$ Вт, $P_2 = 3400$ Вт. Тепловая мощность $P = UI$ и закон Ома $U = IR$ вместе дают $R = \frac{U^2}{P}$. Получаем, что отношение сопротивлений обратно отношению мощностей: $\frac{R_1}{R_2} = \frac{P_2}{P_1} = 1.8$.

г) Мощность нагревателя $P_2 = 3400$ Вт — это энергия, подводимая к воде за секунду. Эта энергия идёт на нагрев воды: $P_2 = m_t C(t - t_0)$, где $m_t = V_t \cdot \rho = \frac{9}{60}$ (л/с) $\cdot 1$ (кг/л) = 0.15 кг/с — масса воды, протекающая через нагреватель за секунду.

Найдём температуру:

$$t = \frac{P_2}{m_t C} + t_0 = \frac{3400}{0.15 \cdot 4200} + 27 = 32.4 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

д) Повторим вычисления предыдущего пункта для двух мощностей нагревателя:

$$t_1 = \frac{P_1}{m_t C} + t_0; \quad t_2 = \frac{P_2}{m_t C} + t_0.$$

Найдём искомую разницу температур:

$$t_2 - t_1 = \frac{P_2 - P_1}{m_t C} = \frac{3400 - 1900}{0.15 \cdot 4200} = 2.4 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

е) Время набора ванны ограничено одним из двух параметров: скоростью нагрева или скоростью наполнения ванны.

При максимальном расходе воды температура, до которой она нагревается, оказывается меньше требуемой. Следовательно, вода должна течь с меньшей скоростью, при этом нагреваясь до $36 \text{ } ^\circ\text{C}$.

Время наполнения ванны τ в этом случае определяется энергией, которая требуется для нагрева 0.3 м^3 воды от $t_0 = 27 \text{ } ^\circ\text{C}$ до $t_k = 36 \text{ } ^\circ\text{C}$.

Составляем уравнение теплового баланса:

$$P_2 \tau = V \cdot \rho \cdot C \cdot (t_k - t_0).$$

$$\tau = \frac{V \cdot \rho \cdot C \cdot \Delta t}{P_2} = \frac{0.3 \cdot 1000 \cdot 4200 \cdot 9}{3400} = 3335.29 \text{ с} = 56 \text{ мин.}$$

Матрица параметров и ответов к вариантам задания 3.

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
U , В	220	180	380	220	180	380	220	180	380	220	180	380	220	180	380	220	180	380	220	180
V_t , л/мин	9	2	13	3.6	6	5	7	9.5	5.2	4	3.6	5.4	5.6	9.5	5.6	4.4	3	12.5	4.6	3.2
P_1 , кВт	1.9	1	1.2	2.2	1.1	1.7	1.9	1.2	2.1	1	1.3	1.7	1.2	1.4	1.7	1.1	1.5	1.9	1	1.2
P_2 , кВт	3.4	2.6	4.4	3.8	3	2.8	4.2	3.4	3.2	2.8	3.8	3.6	3.2	4.2	4	3.6	2.6	4.4	3.8	2.9
t_0 , $^\circ\text{C}$	27	15	27	15	20	15	27	30	25	17	18	17	27	25	20	10	10	30	20	18
d , см	2.54	1.27	1.9	1.9	2.54	2.54	1.27	1.9	1.9	1.9	1.27	1.27	1.27	2.54	2.54	2.54	1.9	1.9	1.9	1.27
S , см^2	5.06	1.27	2.83	2.83	5.06	5.06	1.27	2.83	2.83	2.83	1.27	1.27	1.27	5.06	5.06	5.06	2.83	2.83	2.83	1.27
v , см/с	29.6	26.3	76.5	21.2	19.7	16.5	92.1	55.9	30.6	23.5	47.4	71.1	73.7	31.3	18.4	14.5	17.6	73.5	27.1	42.1
R_1/R_2	1.8	2.6	3.7	1.7	2.7	1.6	2.2	2.8	1.5	2.8	2.9	2.1	2.7	3.0	2.4	3.3	1.7	2.3	3.8	2.4
t , $^\circ\text{C}$	32.4	33.6	31.8	30.1	27.1	23	35.6	35.1	33.8	27	33.1	26.5	35.2	31.3	30.2	21.7	22.4	35	31.8	30.9
$t_2 - t_1$, $^\circ\text{C}$	2.4	11.4	3.5	6.3	4.5	3.1	4.7	3.3	3	6.4	9.9	5	5.1	4.2	5.9	8.1	5.2	2.9	8.7	7.6
τ , мин	56	170	43	116	112	158	45	37	72	143	99	111	59	55	84	152	210	29	88	130